Выразительные возможности λ-оператора и поссибилистских кванторов в модальных логиках первого порядка

Мухаметшина Индира Искандаровна

Томский государственный университет

Аннотация

В работе сравниваются выразительные возможности двух языков первопорядковой модальной логики: первый содержит λ-оператор и актуалистские кванторы, а второй не содержит λ-оператор, но содержит два вида кванторов (актуалистские и поссибилистские) и предикат равенства. Предложен перевод с первого языка на второй, сохраняющий истинностное значение, и показано, что обратного перевода не существует. Тем самым показано, что второй язык превосходит первый по выразительной силе.

Введение

Для формализации, отражающей прочтение *de re* таких предложений как, например, «Число планет необходимо больше семи», требуется язык, первопорядковой модальной логики, содержащий λ-оператор или два вида кванторов. В постере показано, что с названной проблемой может справиться язык первопорядковой модальной логики с двумя видами кванторов и предикатом равенства и что этот язык превосходит по выразительной силе язык с λ-оператором.

Язык $\mathcal{L}_1$

Основными характеристиками языка первопорядковой модальной логики $\mathcal{L}_1$, описанного у М. Фиттинга и Р.Л. Мендельсона, являются:

- наличие в языке λ-оператора и предиката $=$;
- множество термов определяется индуктивно следующим образом:

  $$t ::= x \mid a \mid f(t_1, \ldots, t_n),$$

  где x – переменная, a – константа, f – n-местный функциональный терм, t – терм.
- отсутствие в атомарных формулах констант и функциональных термов;
- наличие формул вида $\langle \lambda x.\Phi \rangle(t)$, где t – терм, x – переменная, Φ – формула.

Семантика языка $\mathcal{L}_1$

Модель – это упорядоченная четверка $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, где $\mathcal{G}$ – непустое множество, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ и $\mathcal{D}$ – функция от миров к непустым множествам (для любого $\Gamma \in \mathcal{G}$, $\mathcal{D}(\Gamma)$ – домен Γ; $\bigcup\{\mathcal{D}(\Gamma) : \Gamma \in \mathcal{G}\}$ – домен модели, $\mathcal{D}(\mathcal{M})$) и $\mathcal{I}$ – функция такая что:

1. для любого $n \geq 1$, каждым n-местному предикатному символу P и $\Gamma \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}$ назначает некоторое n-местное отношение на $\mathcal{D}(\mathcal{M})$;
2. для любых константного символа c и $\Gamma \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}(c, \Gamma) \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$;
3. для любых $n \geq 1$, n-местного функционального символа f и $\Gamma \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}(f, \Gamma) : \mathcal{D}(\mathcal{M})^n \to \mathcal{D}(\mathcal{M})$;
4. для каждого $\Gamma \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}(=, \Gamma)$ – диагональ $\mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Означивание переменных в модели и вариант означивания. Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – модель. Означивание переменных в модели $\mathcal{M}$ – это функция v, назначающая каждой переменной x некоторый элемент $v(x)$ из $\mathcal{D}(\mathcal{M})$. Для любых $\Gamma \in \mathcal{G}$, переменной x и $e \in \mathcal{D}(\Gamma)$, если v_x^e и v согласны относительно всех переменных, кроме, возможно, x и $v_x^e(x) = e$, то v_x^e – x-вариант v.

Денотация терма. Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – модель, $\Gamma \in \mathcal{G}$ и v – означивание в $\mathcal{M}$. Для любых $\Gamma \in \mathcal{G}$, терма t, денотат t в Γ обозначается $v\mathcal{I}(t, \Gamma)$ и определяется следующим образом:

1. если t – переменная, то $v\mathcal{I}(t, \Gamma) = v(t)$;
2. если t – константный символ, то $v\mathcal{I}(t, \Gamma) = \mathcal{I}(t, \Gamma)$;
3. если f – n-местный функциональный символ и $t_1, \ldots, t_n$ – термы, то

$$v\mathcal{I}(f(t_1, \ldots, t_n), \Gamma) = \mathcal{I}(f, \Gamma)\langle v\mathcal{I}(t_1, \Gamma), \ldots, v\mathcal{I}(t_n, \Gamma)\rangle.$$

Истинность формулы $\mathcal{L}_1$ в некотором мире модели при некотором означивании переменных (истинность-1). Определим отношение истинности ($\models^1$) между моделями, мирами, означиваниями переменных и формулами языка $\mathcal{L}_1$ (укажем только пункты для атомарных формул и формул с λ-оператором; остальные пункты стандартны), так что, если $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – модель, Γ – возможный мир, v – означивание переменных в $\mathcal{M}$ и Φ, Ψ – формулы $\mathcal{L}_1$, то:

- если P является n-местным предикатным символом и $x_1, \ldots, x_n$ – переменные, то $\mathcal{M}, \Gamma \models_v^1 P(x_1, \ldots, x_n) \iff \langle (v)(x_1), \ldots, (v)(x_n) \rangle \in \mathcal{I}(P, \Gamma)$;
- для любого терма t, $\mathcal{M}, \Gamma \models_v^1 \langle \lambda x.\Phi \rangle(t) \iff \mathcal{M}, \Gamma \models^1_{v_x^{v\mathcal{I}(t,\Gamma)}} \Phi$.

Язык $\mathcal{L}_2$

Вокабуляр языка $\mathcal{L}_2$ отличается от вокабуляра языка $\mathcal{L}_1$ отсуствием λ-оператора и наличием поссибилистского квантора всеобщности Π. Множество термов $\mathcal{L}_2$ равно множеству термов $\mathcal{L}_1$.

Атомарная формула $\mathcal{L}_2$. Если P – n-местный предикатный символ и $t_1, \ldots, t_n$ – термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ – атомарная формула.

Множество формул $\mathcal{L}_2$ Множество формул языка $\mathcal{L}_2$ определяется индуктивно следующим образом:

$$\Phi ::= P(t_1, \ldots, t_n) \mid (\neg\, \Phi) \mid (\Phi_1 \to \Phi_2) \mid (\Box\, \Phi) \mid (\forall x \Phi) \mid (\Pi x \Phi),$$

где P – n-местный предикатный символ, x – переменная, $t_1, \ldots, t_n$ – термы, Φ – формула. Квантор Σ определяется через Π следующим образом: для любой формулы Φ и переменной x,

$$\Sigma x \Phi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\, \Pi x \neg\, \Phi.$$

Семантика языка $\mathcal{L}_2$

Определения модели, означивания, варианта означивания, денотации терма такие же как в описании семантики для языка $\mathcal{L}_1$. Семантика $\mathcal{L}_2$ отличается от семантики $\mathcal{L}_1$ определением истинности.

Истинность формулы $\mathcal{L}_2$ в некотором мире модели при некотором означивании переменных (истинность-2) Определим отношение истинности ($\models^2$) между моделями, мирами, означиваниями переменных и формулами языка $\mathcal{L}_2$ (укажем только пункты для атомарных формул и формул с Π; остальные пункты стандартны), так что, если $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – модель, Γ – возможный мир, v – означивание переменных в $\mathcal{M}$ и Φ, Ψ – формулы $\mathcal{L}_2$, то:

- Если P является n-местным предикатным символом и $t_1, \ldots, t_n$ – термы, то $\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 P(t_1, \ldots, t_n) \iff \langle v\mathcal{I}(t_1, \Gamma), \ldots, v\mathcal{I}(t_n, \Gamma) \rangle \in \mathcal{I}(P, \Gamma)$;
- $\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \Pi x \Phi \iff \forall e (e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \Rightarrow \mathcal{M}, \Gamma \models^2_{v_x^e} \Phi)$.

Сравнение выразительных возможностей языков $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$

В этом разделе дано определение перевода с языка $\mathcal{L}_1$ на язык $\mathcal{L}_2$, теорема, показывающая, что перевод сохраняет истинностное значение формул (Теорема 1), и теорема, показывающая, что обратного перевода не существует (Теорема 2).

Нотационная конвенция. Для любой формулы Φ (языка $\mathcal{L}_1$ или языка $\mathcal{L}_2$) и любых переменных x, y, Φ_x^y – результат замены всех свободных вхождений переменной x вхождениями переменной y.

Перевод с языка $\mathcal{L}_1$ на язык $\mathcal{L}_2$ – это функция от формул языка $\mathcal{L}_1$ к формулам языка $\mathcal{L}_2$, такая что для любых формул Φ, Ψ языка $\mathcal{L}_1$:

1. если P – n-местный предикатный символ и $x_1, \ldots, x_n$ – переменные, то $\mathbb{T}(P(x_1, \ldots, x_n)) = P(x_1, \ldots, x_n)$;
2. $\mathbb{T}(\neg\, \Phi) = \neg\, \mathbb{T}(\Phi)$;
3. $\mathbb{T}(\Phi \to \Psi) = \mathbb{T}(\Phi) \to \mathbb{T}(\Psi)$;
4. $\mathbb{T}(\Box\, \Phi) = \Box\, \mathbb{T}(\Phi)$;
5. $\mathbb{T}(\forall x \Phi) = \forall x \mathbb{T}(\Phi)$;
6. $\mathbb{T}(\langle \lambda x.\Phi \rangle(t)) = \Sigma y (y = t \,\&\, \mathbb{T}(\Phi_x^y))$, где y не имеет вхождений в $\langle \lambda x.\Phi \rangle(t)$.

Пример. На языке $\mathcal{L}_1$ прочтение *de re* предложения «Число планет необходимо больше семи» формализуется как $\langle \lambda x.\Box x > 7 \rangle(n)$, где n – число планет. По определению перевода с языка $\mathcal{L}_1$ получим формализацию прочтения *de re* того же предложения на языке $\mathcal{L}_2$: $\Sigma y (y = n \,\&\, \Box y > 7)$, где n – число планет.

Теорема. *Для любых формулы Φ языка $\mathcal{L}_1$, модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, $\Gamma \in \mathcal{G}$ и означивания переменных v в модели $\mathcal{M}$,*

$$\mathcal{M}, \Gamma \models_v^1 \Phi \iff \mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \mathbb{T}(\Phi).$$

Теорема. *Существует формула Φ языка $\mathcal{L}_2$, которой не эквивалентна ни одна из формул языка $\mathcal{L}_1$, т.е. для любой формулы $\Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$ существуют модель $\mathcal{M}$, мир Γ и означивание v, такие что*

$$(\mathcal{M}, \Gamma \models_v^2 \Phi \,\&\, \mathcal{M}, \Gamma \not\models_v^1 \Psi) \vee (\mathcal{M}, \Gamma \not\models_v^2 \Phi \,\&\, \mathcal{M}, \Gamma \models_v^1 \Psi).$$

Заключение

Было показано, что язык первопорядковой модальной логики с двумя видами кванторов и предикатом равенства превосходит по выразительной силе язык первопорядковой модальной логики с λ-оператором.

Литература

Fitting M. First-Order Modal Logic. / M. Fitting, R.L. Mendelsohn. – New York : Springer-Science+Business Media, B.Y., 1998. – 287, [13] с.