Репрезентации познаваемости de re в гибридной эпистемической логике

Е.В. Борисов

Институт философии и права СО РАН

23-24.05.2025

Проблема

Проблема состоит в определении формулы (некоторой логики), которая выражает познаваемость пропозиции φ. Ниже я отождествляю пропозиции и формулы.

В более технической формулировке: проблема состоит в определении функции k от формул к формулам, такой чтобы $k(\varphi)$ выражала тезис о познаваемости φ.

Проблема

Познаваемость – это возможность известности, поэтому $k(\varphi)$ должна иметь вид

$$\ldots\Diamond\ldots K\ldots\varphi^*,$$

где:

- φ^* – результат некоторого преобразования φ (т.е. * – тоже функция от формул к формулам);
- φ находится в области действия K;
- K находится в области действия $\Diamond$.

Проблема

Эта проблема нетривиальна по многим причинам, в частности:

- Определение $k(\varphi)$ как $\Diamond K\varphi$ порождает парадокс Фитча.
- Познаваемость de re и познаваемость de dicto должны определяться по-разному.
- Интерпретации de re и de dicto допускают разнообразные комбинации

Ниже речь пойдет о познаваемости de re.

Подходы к проблеме

Утверждение о познаваемости de re пропозиции φ в мире w должно семантически «привязывать» какие-то компоненты φ к w, чтобы эти компоненты интерпретировались относительно w, а не относительно миров, в которые переносят $\Diamond$ и K.

Что именно должно быть «привязано» к w? Существующие ответы:

- всё (Edgington);
- кванторы (Kvanvig);
- кванторы и термы (Proietti).

Литература

- Edgington, D. (1985) The Paradox of Knowability. Mind. 94. P. 557–568.
- Edgington, D. (2010) Possible Knowledge of Unknown Truth. Synthese. 173. pp. 41–52.
- Kvanvig, J. (2006) The Knowability Paradox. Oxford: Clarendon Press.
- Kvanvig, J. (2010) The Incarnation and the Knowability Paradox. Synthese. 173. pp. 89–105.
- Proietti C. The Fitch-Church Paradox and First Order Modal Logic // Erkenntnis. 2016. Vol. 81. P. 87–104.

В этом докладе обсуждается подход Proietti.

План доклада

1. Введение
2. Мотивация гибридной логики
3. Логика FHL
4. Репрезентация познаваемости de re в FHL
5. Критика и предложения
6. Заключение

De re / de dicto: простой случай

Рассмотрим квази-формулу

$$\Diamond P(a)$$

Здесь возможны интерпретации de re и de dicto для a.
Представим эти интерпретации квази-формулами:

$$① \Diamond ② \; P(a^1) \quad \text{de re}$$

$$① \Diamond ② \; P(a^2) \quad \text{de dicto}$$

Здесь ⓝ маркирует одну из синтаксических позиций, порождаемых оператором $\Diamond$; верхний индекс ассоциирует константу с соответствующей синтаксической позицией; эта ассоциация определяет интерпретацию константы.

De re / de dicto: более сложный случа

Рассмотрим квази-формулу

$$①\ \Diamond\ ②\ \Box\ ③\ P^2(a^3, b^1)$$

Здесь:

- a имеет интерпретацию de dicto относительно $\Diamond$ и $\Box$;
- b имеет интерпретацию de re относительно $\Diamond$ и $\Box$;
- P имеет интерпретацию de dicto относительно $\Diamond$ и de re относительно $\Box$.

Чтобы выражать такого рода пропозиции, необходим механизм ассоциации конституент формул с синтаксическими позициями, порождаемыми модальными операторами. Гибридная логика содержит такого рода механизм.

Алфавит $\mathcal{L}$

Алфавит $\mathcal{L}$ содержит следующие символы:

- счетное множество VAR индивидных переменных,
- счетное множество $SVAR$ переменных для возможных миров,
- счетное множество CON индивидных констант,
- счетное множество $PRED^n$ n-местных предикатов для каждого натурального $n > 0$,
- $\neg$, $\vee$, $\Diamond$, $\exists$ ($\rightarrow$, $\&$, $\Box$, $\forall$ определяются стандартным образом),
- сентенциональные гибридные операторы $\downarrow$, $@$,
- термовый гибридный оператор $:$,
- скобки и запятую.

FHL-термы

Множество $TERM$ термов FHL-термов определяется следующим образом:

$$t ::= x \mid c \mid s : t$$

где $x \in VAR$, $c \in CON$, $s \in SVAR$.

Интуитивный смысл терма $s : t$ «объект, обозначаемый t в s»

FHL-формулы

$$\varphi ::= P(t_1, \ldots, t_n) \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \vee \varphi_2) \mid (\exists x)\varphi \mid \Diamond\varphi \mid K\varphi \mid \downarrow s.\varphi \mid @_s\varphi,$$

где $P \in PRED^n$, $t_1, \ldots, t_n \in TERM$, $x \in VAR$, $s \in SVAR$.

Модель

Модель — это пятерка $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}_\Diamond, \mathcal{R}_K, \mathcal{D}, d, \mathcal{I} \rangle$, где:

- $\mathcal{G} \neq \varnothing$ (множество возможных миров);
- $\mathcal{R}_\Diamond \subseteq \mathcal{G}^2$ (алетическое отношение достижимости);
- $\mathcal{R}_K \subseteq \mathcal{G}^2$ (эпистемическое отношение достижимости);
- $\mathcal{D} \neq \varnothing$ (домен модели);
- d (доменная функция) — функция, такая что для любого $w \in \mathcal{G}$, $d(w) \subseteq \mathcal{D}$ и $d(w) \neq \varnothing$;
- $\mathcal{I}$ (интерпретация) — функция, такая что:
    - для любого $c \in CON$ и любого $w \in G$, $\mathcal{I}(c, w) \in \mathcal{D}$;
    - для любого $P \in PRED^n$ и любого $w \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}(P, w) \subseteq \mathcal{D}^n$.

Оценка переменных в модели

Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}_{\Diamond}, \mathcal{R}_K, \mathcal{D}, d, \mathcal{I} \rangle$ — модель. Оценка переменных в $\mathcal{M}$ — это функция $v : VAR \cup SVAR \to \mathcal{D} \cup \mathcal{G}$, такая что:

1. для каждого $x \in VAR$, $v(x) \in \mathcal{D}$;
2. для любого $s \in SVAR$, $v(s) \in \mathcal{G}$.

Вариант оценки переменных

Пусть v — оценка переменных в некоторой модели. Тогда v_x^e отображает x на e, а любую другую переменную y — на $v(y)$.

Денотация

$\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}_{\Diamond}, \mathcal{R}_K, \mathcal{D}, d, \mathcal{I} \rangle$ — модель и v — оценка переменных в $\mathcal{M}$. Для любого $t \in TERM$ и любого $w \in G$ денотат t в w, $v\mathcal{I}(t, w)$ определяется следующим образом:

- $v\mathcal{I}(t, w) = v(t)$, если $t \in VAR$;
- $v\mathcal{I}(t, w) = \mathcal{I}(t, w)$, если $t \in CON$;
- $v\mathcal{I}(s : t, w) = v\mathcal{I}(t, v(s))$.

Истина в модели ($\models$)

Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}_\Diamond, \mathcal{R}_K, \mathcal{D}, d, \mathcal{I} \rangle$ — модель, $w \in \mathcal{G}$, v — оценка переменных в $\mathcal{M}$, φ, ψ — формулы, $P \in PRED^n$ и $x_1, \ldots, x_n \in VAR$. Тогда:

1. $\mathcal{M}, w, v \models P(t_1, \ldots, t_n) \iff \langle v\mathcal{I}(t_1, w), \ldots, v\mathcal{I}(t_n, w) \rangle \in \mathcal{I}(P, w)$;
2. $\mathcal{M}, w, v \models \neg\varphi \iff \mathcal{M}, w, v \not\models \varphi$;
3. $\mathcal{M}, w, v \models \varphi \vee \psi \iff \mathcal{M}, w, v \models \varphi \vee \mathcal{M}, w, v \models \psi)$;
4. $\mathcal{M}, w, v \models \Diamond\varphi \iff \exists u(w\mathcal{R}_\Diamond u \,\&\, \mathcal{M}, u, v \models \varphi)$;
5. $\mathcal{M}, w, v \models K\varphi \iff \forall u(w\mathcal{R}_K u \Rightarrow \mathcal{M}, u, v \models \varphi)$;
6. $\mathcal{M}, w, v \models \exists x\varphi \iff \exists e(e \in d(w) \,\&\, \mathcal{M}, w, v^e_x \models \varphi)$;
7. $\mathcal{M}, w, v \models \downarrow s.\, \varphi \iff \mathcal{M}, w, v^w_s \models \varphi$;
8. $\mathcal{M}, w, v \models @_s\varphi \iff \mathcal{M}, v(s), v \models \varphi$;

Что умеет FHL

Пропозиция

$$①\, \Diamond\, ②\, \Box\, ③\, P^2(a^3, b^1)$$

выражается в FHL следующим образом:

$$\downarrow s.\, \Diamond \downarrow t.\, \Box \downarrow r.\, @_t P(r : a, s : b)$$

В самом деле:

$\mathcal{M}, w, v \vDash \downarrow s.\, \Diamond \downarrow t.\, \Box \downarrow r.\, @_t P(r : a, s : b)$ е.т.е.
$(\exists w' \in \mathcal{R}(w))\ (\forall w'' \in \mathcal{R}(w'))\ \langle \mathcal{I}(a, w''), \mathcal{I}(b, w) \rangle \in \mathcal{I}(P, w')$

(Здесь $\mathcal{R}$ – отношение достижимости в $\mathcal{M}$; $\mathcal{R}(x) \coloneqq \{y : x\mathcal{R}y\}$.)

Функция перевода σ: рекурсивное определение

σ_t^s $(s, t \in SVAR)$ — это функция от формул к формулам, определенная для формул, не содержащих K, $\downarrow$ или @.

- $\sigma_t^s(P(t_1, \ldots, t_n)) ::= P(s : t_1, \ldots, s : t_n)$
- $\sigma_t^s(\neg\varphi) ::= \neg\sigma_t^s(\varphi)$
- $\sigma_t^s(\varphi \vee \psi) ::= \sigma_t^s(\varphi) \vee \sigma_t^s(\psi)$
- $\sigma_t^s(\Diamond\varphi) ::= \Diamond \downarrow r.\ \sigma_r^s(\varphi)$
- $\sigma_t^s(\exists x\varphi) ::= @_s\exists x @_t \sigma_t^s(\varphi)$

Примечание: можно определить σ_t^s для всех формул, но для наших целей достаточно данного определения.

Главное: познаваемость

Познаваемость φ de re выражается формулой

$$\downarrow s.\Diamond \downarrow t.K\sigma_t^s(\varphi)$$

Как видим, эта формула имеет искомую форму:

$$\ldots \Diamond \ldots K \ldots \varphi^*$$

Эта формализация познаваемости обеспечивает интерпретацию de re для всех констант и кванторов в φ.

Пример: $\Diamond P(c)$

$\sigma_t^s(\Diamond P(c)) = \Diamond \downarrow r.\sigma_r^s(P(c)) = \Diamond \downarrow r.P(s\colon c)$

Познаваемость $\Diamond P(c)$ выражается формулой $\sigma_t^s(\Diamond P(c))$, т.е.

$$\downarrow s.\Diamond \downarrow t.K \Diamond \downarrow r.P(s\colon c)$$

Данная формула эквивалентна

$$\downarrow s.\Diamond K \Diamond P(s\colon c) \quad (^*)$$

При оценке последней формулы относительно w константа c интерпретируется относительно w. Это значит, что $(^*)$ выражает познаваемость $\Diamond P(c)$ de re.

В оставшейся части доклада:

- приведены два возражения против данной формализации познаваемости de re;
- сформулированы два предложения по ее уточнению;
- показано, что проблема остается открытой.

Возражение 1

Познаваемость $\exists x P(x)$ выражается формулой

$$\downarrow s.\Diamond \downarrow t.K @_s \exists x @_t P(s\colon x) \quad (^*)$$

При стандартном допущении, что эпистемическое отношение достижимости рефлексивно, данная формула оказывается (как ни странно!) эквивалентна

$$\exists x \Diamond P(x) \quad (^{**})$$

Это контр-интуитивный результат, поскольку в $(^{**})$ отсутствует эпистемический оператор.

Предложение 1: модификация выражения познаваемости.

Познаваемость φ выражается формулой

$$\downarrow s.\Diamond K \downarrow t.\sigma_t^s(\varphi),$$

не $\downarrow s.\Diamond \downarrow t.K\sigma_t^s(\varphi)$.

Это устраняет возражение 1. Например, в этом случае $\exists x P(x)$ выражается формулой

$$\downarrow s.\Diamond K \downarrow t.@_s \exists x @_t P(s\colon x),$$

которая не эквивалентна $\exists x \Diamond P(x)$.

Возражение 2

Тезисы о познаваемости de re требуют интерпретировать de re все константы. Однако это бессмысленно, когда речь идет о фикциональных объектах. Пример:

Маша влюблена в Шерлока.

Познаваемость de re этой пропозиции предполагает интерпретацию имени «Шерлок» de dicto.

Таким образом, необходимо более деликатное обхождение с индивидными константами.

Предложение 2: расширение формального языка

Добавить к алфавиту λ-оператор и модифицировать некоторые определения:

- Включить в определение формулы пункт $(\lambda x.\varphi)(c)$ (φ — формула, c — константа).
- Включить в определение истины пункт $\mathcal{M}, w, v \vDash (\lambda x.\varphi)(c) \iff \mathcal{M}, w, v_x^{\mathcal{I}(c,w)} \vDash \varphi$.
- Включить в определение σ_t^s пункт $\sigma_t^s((\lambda x.\varphi)(c)) ::= @_s(\lambda x.@_t\,\sigma_t^s(\varphi))(c)$.
- Заменить пункт для атомарных формул в определении σ_t^s следующим: Если φ — атомарная формула, то $\sigma_t^s(\varphi) ::= \varphi$.

Это дает возможность учитывать различие между интерпретацией констант de re и de dicto в репрезентации познаваемости.

Предложение 2: пример

В пропозиции $(\lambda x.\Diamond P(x,b))(a)$ константа a имеет интерпретацию de re, b — de dicto.

Познаваемость этой пропозиции выражается формулой

$$\downarrow s.\Diamond K \downarrow t.@_s(\lambda x.@_t \Diamond \downarrow r.P(x,b))(a)$$

При оценке этой формулы относительно мира w (некоторой модели) мы учитываем денотат a относительно w и денотат b относительно миров, в которые нас переносят $\Diamond$ и K. Т.е. мы интерпретируем a de re, b — de dicto, что и требовалось.

Заключение: все сложно...

Сформулированные предложения обеспечивают только частичное решение проблемы. Остаются открытыми (как минимум) две задачи, которые я проиллюстрирую на примерах:

- Интерпретация квантора de dicto при репрезентации познаваемости пропозиции $\Diamond\exists x\varphi$.
- Промежуточные интерпретации кванторов и констант при репрезентации познаваемости пропозиций $\Diamond\exists x\Diamond\varphi$ и $\Diamond(\lambda x.\Diamond\varphi)(c)$.

Спасибо за внимание!

borisov.evgeny@gmail.com