

Международная научная конференция «uAnalytiCon-2025: Фикциональные объекты»,
23-24 мая 2025 г.

Несколько новых примеров в поддержку аргумента об объяснительной неустранимости математики

Василий Ершов (*yershov.v.d@gmail.com*)

УрФУ

24.05.2025

Введение

1. Аргумент о неустранимости математики Куайна-Патнэма (Colyvan, 2001):

(П1) Мы должны иметь онтологические обязательства перед всеми и только теми сущностями, которые неустранимы из наших лучших научных теорий.

(П2) Математические сущности неустранимы из наших лучших научных теорий.

(3) Следовательно, у нас должны быть онтологические обязательства перед математическими сущностями.

2. Х. Филд, «Наука без чисел» (1980): математические сущности устранимы из научных теорий, и при этом получаются *привлекательные* теории.

Проблемы «Науки без чисел»

1. В рецензии на «Науку без чисел» Д. Маламент отметил, что номинализация квантовой механики (как и любой другой дисциплины, использующей «фазовые пространства», например, термодинамики) сталкивается с непреодолимыми трудностями.
2. Позиция Х. Филда не согласуется с научной практикой: известно множество случаев, когда уравнения оказывались «умнее» своих авторов, и постулируемые в рамках математизированных теорий сущности оказывались существующими *реально*. Свойства этих объектов точно соответствовали предсказанным математически. В этих случаях происходит пересмотр, иногда существенный, содержания естественнонаучных теорий. *Пример: чёрные дыры, ЭМВ,*

Возражение М. Балагера

Очень сильный способ «реабилитации» фикционализма предложил М. Балагер. По его словам, «Для того, чтобы объяснить, какую роль гильбертовы пространства играют в квантовой механике, нет необходимости номинализировать её или устанавливать гомоморфизмы от эмпирических структур к математическим. Всё, что нам нужно – это изучить [квантовую] теорию и объяснить различные случаи использования гильбертовых пространств и то, как они помогают нам утверждать факты о квантовом мире... Весь «математический багаж» квантовой механики... не делает ничего, кроме предоставления удобного и точного способа описания чисто номиналистических фактов о квантовом мире» (Balaguer, 1996; перевод наш – В. Е.)

Аргумент об объяснительной неустранимости математики А. Бейкера (Baker, 2005)

Are there Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena? 233

- (1) Having a life-cycle period which minimizes intersection with other (nearby / lower) periods is evolutionarily advantageous. [biological 'law']
- (2) Prime periods minimize intersection (compared to non-prime periods). [number theoretic theorem]

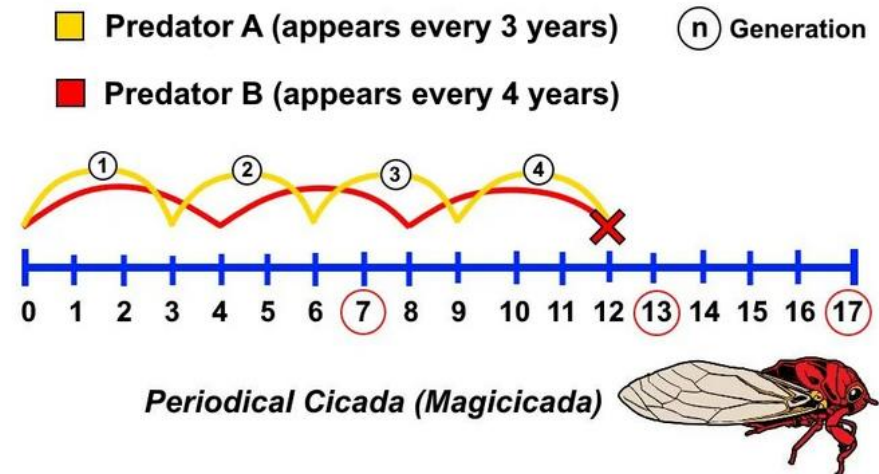
-
- (3) Hence organisms with periodic life-cycles are likely to evolve periods that are prime. ['mixed' biological / mathematical law]

When the law expressed in (3) is combined with

- (4) Cicadas in ecosystem-type, E, are limited by biological constraints to periods from 14 to 18 years.¹⁴[ecological constraint]

it yields the specific prediction

- (5) Hence cicadas in ecosystem-type, E, are likely to evolve 17-year periods.



Проблема: возможно, математика здесь не при чём.

Решение: надо найти более убедительные примеры!

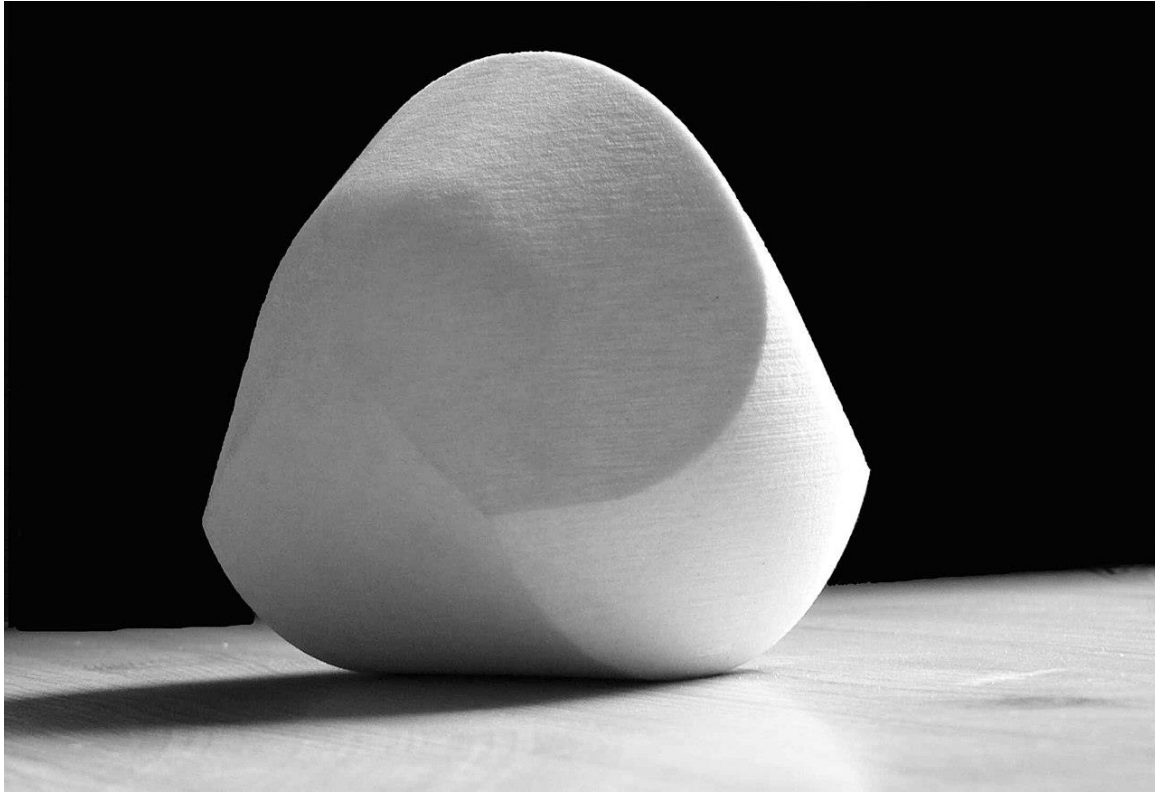
ПРИМЕР ПЕРВЫЙ

Проблема: существуют ли трёхмерные выпуклые моно-моностатичные тела – т. е. тела, обладающие одной точкой устойчивого и одной точкой неустойчивого равновесия?

Неваляшка подходит, но у неё неравномерно распределена масса.

Арнольд, 1995 г.: такие тела **существуют**. *Теоретически.*

П. Варконьи, Г. Домокош, 2006 г.: такие тела существуют. *Практически!*



Гөмбөц



Geochelone elegans



Hydromedusa tectifera



Geochelone elegans

ПРИМЕР ВТОРОЙ

А. Эйнштейн: «Классическая термодинамика – это единственная теория общего содержания, относительно которой я убеждён, что в рамках применимости её основных понятий она никогда не будет опровергнута. Это последнее замечание приведено к особому сведению принципиальных скептиков»

Классическая термодинамика – феноменологическая термодинамика – в рамках которой закон сохранения энергии представляется дифференциальными уравнениями Пфаффа. Так, для дифференциала* теплоты Q (или внутренней энергии, или энтропии) имеем:

$$1. \delta Q = \sum_{i=1}^n X_i dx_i$$

$$2. \delta Q = dU + pdV + \sum_{i=1}^n W_i$$

$$3. dQ = TdS = \sum_{i=1}^n X_i dx_i$$

$$4. TdS = dU + pdV + \sum_{i=1}^n W_i$$

Применяя последовательно несложные математические преобразования (взятие смешанных производных, выполнение преобразований Лежандра...), можно прийти к т. н. принципу равновесия Гиббса:

$$(\delta U)_{S,V,n_i} \geq 0, (\delta^2 U)_{S,V,n_i} > 0$$

Что эквивалентно

$$(\delta S)_{U,V,n_i} \leq 0, (\delta^2 S)_{U,V,n_i} < 0$$

Принцип максимизации энтропии и минимизации энергии можно независимо получить, допустим, комбинаторными (т. е. снова математическими!) методами.

Дополнительные условия (39.3) уже учтены в (40.1). Поэтому имеем

$$U^* = \frac{1}{2} \left[U + \frac{\partial U}{\partial S} \delta S + \frac{\partial U}{\partial n} \delta n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} (\delta S)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial n} \delta S \delta n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} (\delta n)^2 + \dots \right], \quad (40.2)$$

соответственно

$$U^{**} = \frac{1}{2} \left[U - \frac{\partial U}{\partial S} \delta S - \frac{\partial U}{\partial n} \delta n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} (\delta S)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial n} \delta S \delta n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} (\delta n)^2 - \dots \right]. \quad (40.3)$$

Если сложить уравнения (40.2) и (40.3), то сокращаются члены первого порядка. Если после подстановки в (40.1) составить разность по отношению к (39.1), то получим

$$U^* + U^{**} > U' \quad (40.4)$$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} (\delta S)^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial n} \delta S \delta n + \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} (\delta n)^2 > 0. \quad (40.5)$$

Таким образом, условия стабильности утверждают, что квадратичные формы, стоящие в неравенстве (40.5), должны быть положительными. В теории квадратичных форм показывается, что это возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial S} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial n} & \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \end{vmatrix} \text{ со всеми главными минорами } > 0. \quad (40.6)$$

Итак, условие стабильности говорит о том, что квадратичная форма, образованная из вариаций второго порядка, должна быть положительной. Это возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U^*}{\partial S^{*2}} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 U^*}{\partial x_{m-1} \partial S^*} \\ \frac{\partial^2 U^*}{\partial S^* \partial V^*} & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 U^*}{\partial S^* \partial x_{m-1}} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 U^*}{\partial x_{m-1}^2} \end{vmatrix}$$

со всеми главными (40.12) минорами > 0 .

Это является общей формулировкой условий стабильности в энергетическом выражении. Отсюда видно, что условия стабильности состоят в предсказаниях знака вторых производных характеристических функций, которые должны выполняться для каждой стабильной фазы. Далее, (40.12) показывает, что для гомогенной системы, состоящей из m компонентов, имеется $m+1$ независимых условий стабильности.

Мюнстер, 2002

Кроме того, можно получить, допустим, выражения для т. н. условий стабильности: термической – положительность молярной теплоёмкости при постоянном объёме и механической – положительность изэнтропийной сжимаемости.

А ещё показать необходимость существования абсолютной температуры.

А ещё получать величины теплот образования и/или необходимых температур или давлений.

А ещё вывести принцип Ле Шателье-Брауна – где-то недалеко видно И. Р. Пригожина. Отметим, что в общем случае мы можем изучать *произвольные* системы – можно говорить и о термодинамике табуретки, и о термодинамике чёрной дыры. Что термодинамика запрещает, того не бывает – невозможно получить молекулу Na_2He , и невозможно, чтобы упавшая на пол и разбившаяся кружка самопроизвольно взлетела и «склеилась» обратно*.

ПРИМЕР ТРЕТИЙ

Почему в естественнонаучных теориях практически никогда не используются дифференциальные уравнения третьего и более высоких порядков (а если и используются, то только «особых» видов)?

Всё дело в т. н. **неустойчивости Остроградского**.

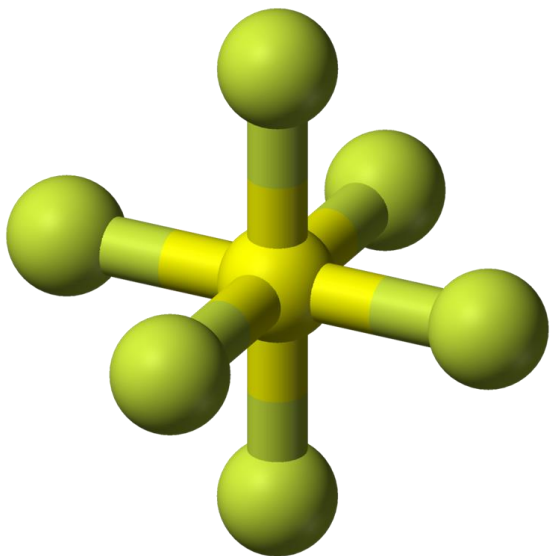
Если лагранжиан системы невырожден (определитель соответствующей матрицы не равен нулю), соответствующий ему гамильтониан неограничен снизу, что приводит к появлению неустойчивостей. Говоря конкретнее, в этой системе будет наблюдаться производство отрицательной кинетической энергии, а это очень плохо.

В рамках КТП это означает, что при наличии в уравнениях производных по времени порядка 3 или выше становится возможным создавать частицы с отрицательной (и всё уменьшающейся) энергией.

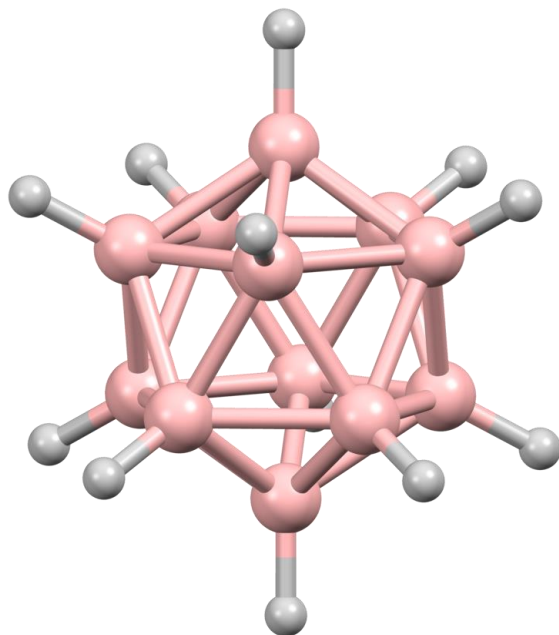
Из энтропийных соображений получаем, что Вселенная в таком случае будет «полна» частиц. Возможно, именно это и происходило в «инфляционную эпоху», длившуюся меньше чем через 10^{-36} с после Большого Взрыва.

Отметим, что для анализа «физической стороны» этого вопроса снова привлекалась термодинамика.

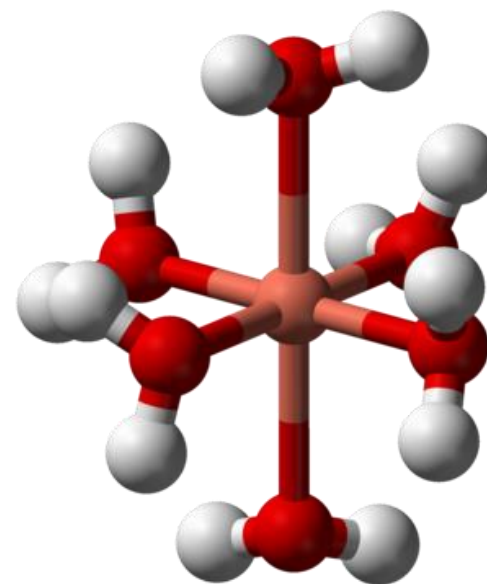
ПРИМЕР ЧЕТВЁРТЫЙ (ОН ЖЕ ПЯТЫЙ)



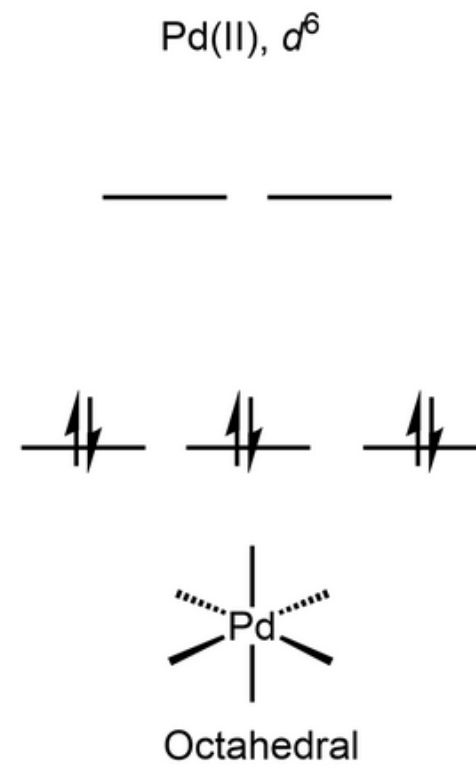
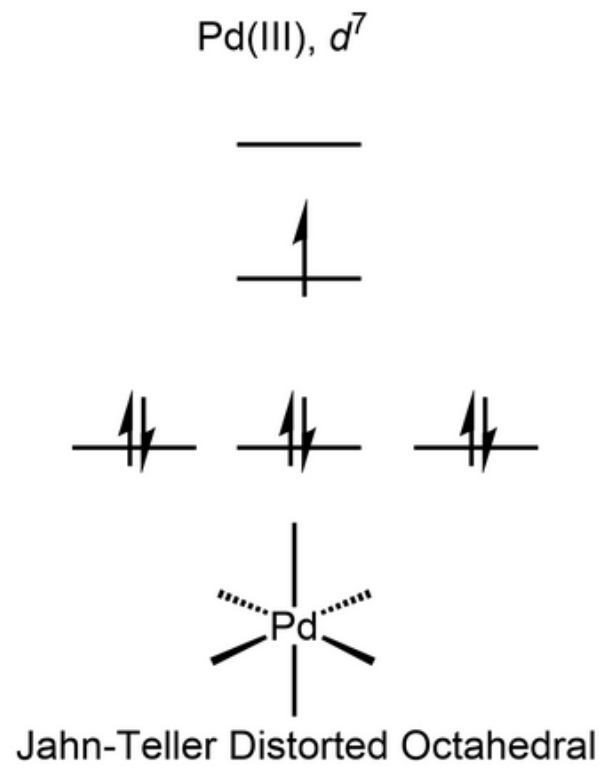
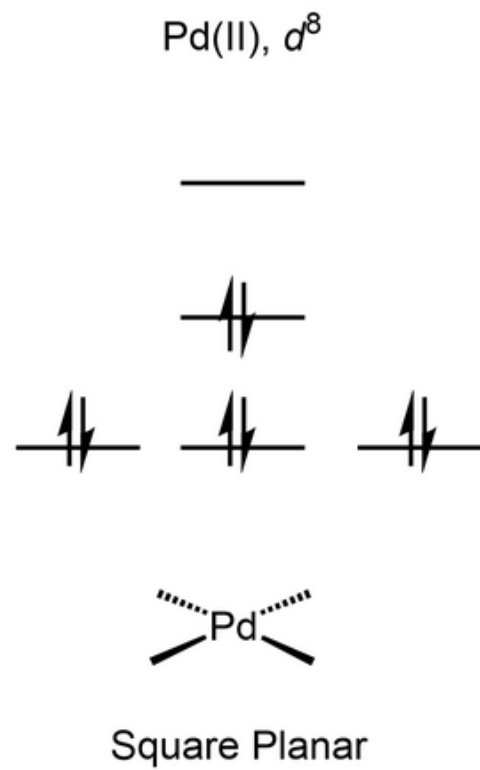
Гексафторид серы SF_6
октаэдр

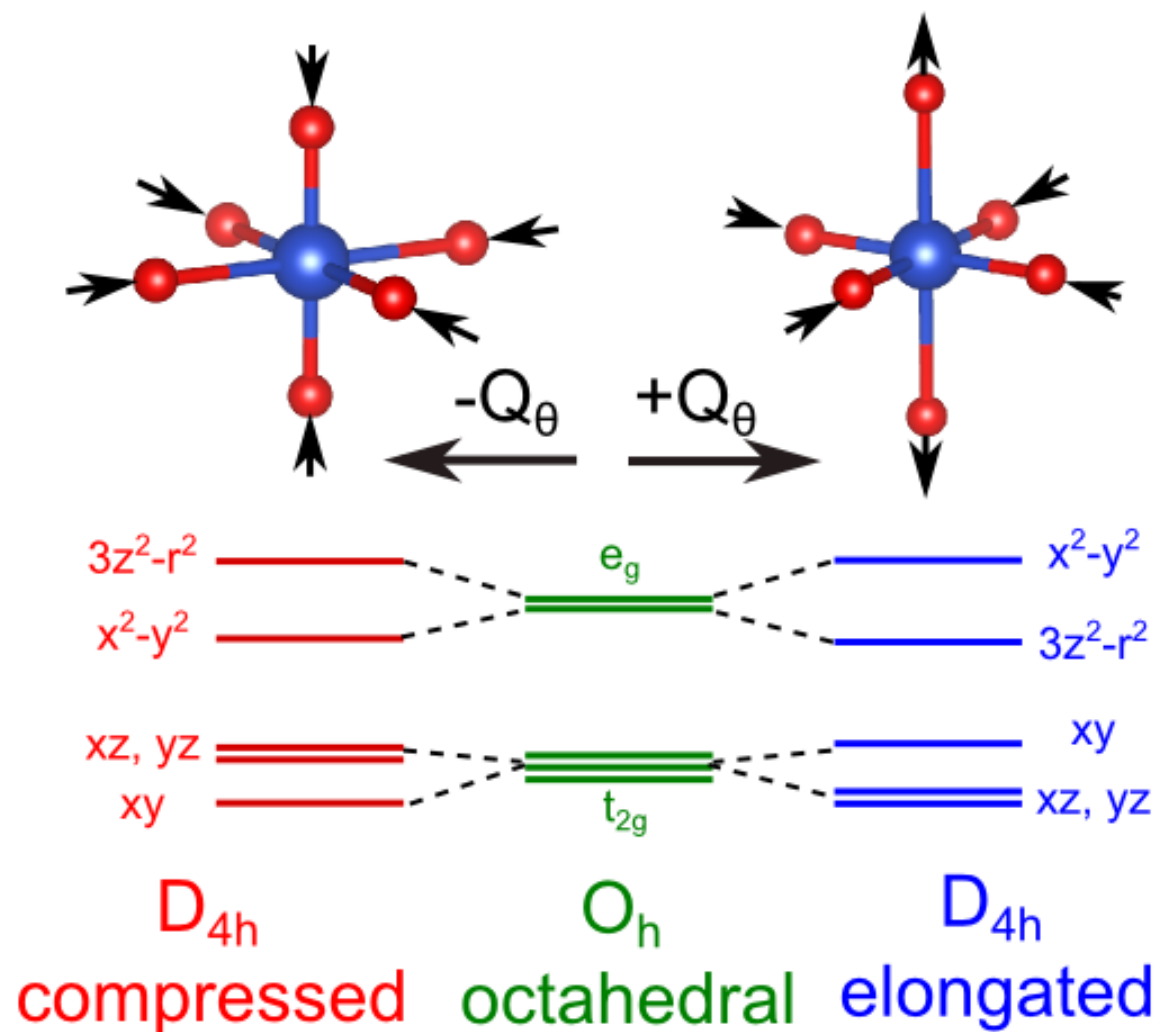


Додекаборат-анион $[\text{B}_{12}\text{H}_{12}]^{2-}$
додекаэдр



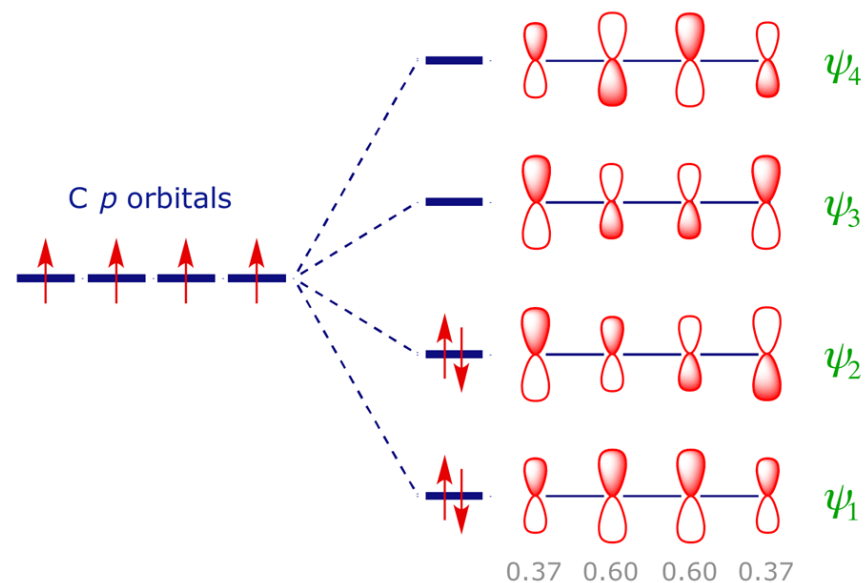
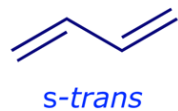
Гексааквамедь (II) $[\text{Cu}(\text{H}_2\text{O})_6]^{2+}$
Искажённый октаэдр?!



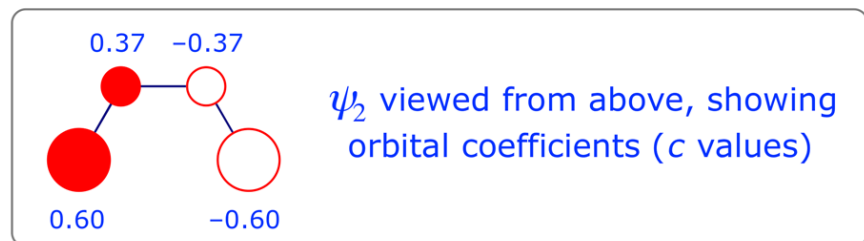


Эффект Яна-Теллера (1937):
 любая нелинейная
 конфигурация атомов,
 содержащая вырожденные
 состояния электронов,
 неустойчива по отношению
 к понижающим её
 симметрию деформациям.

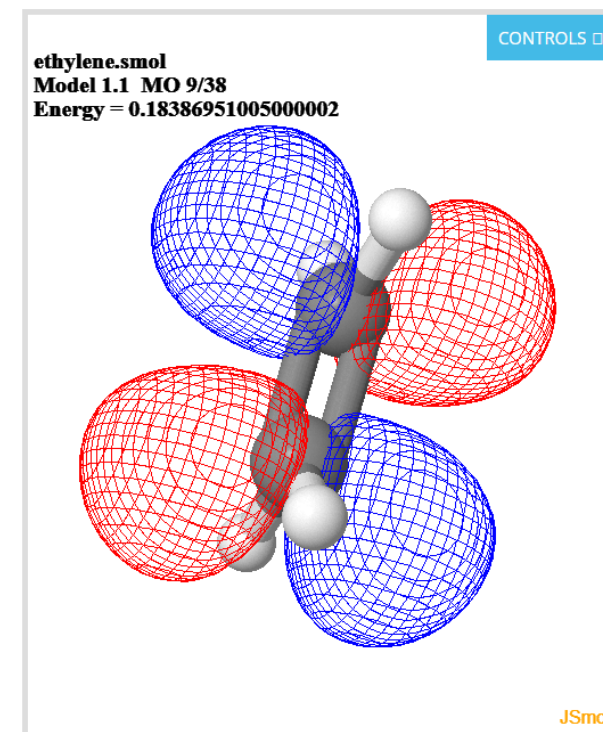
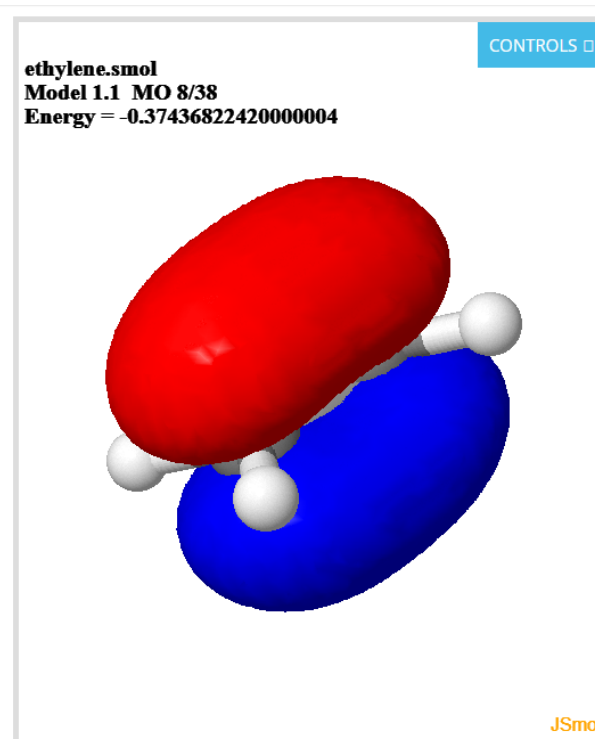
π -Molecular orbitals of 1,3-butadiene



N.B. energy levels and coefficients are not drawn to scale



Calculation: Hartree-Fock, 6-31G* basis set (Spartan 08)



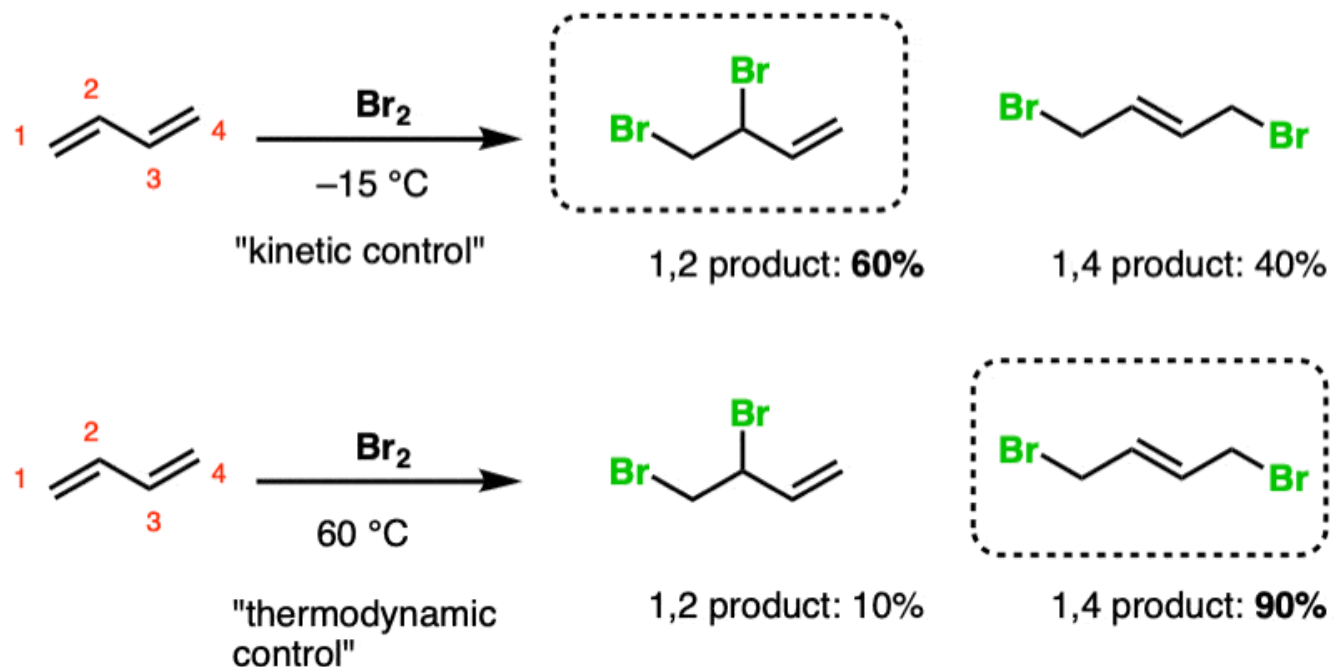
Summary - More on 1,2- and 1,4- Additions

Halogenation is another reaction of dienes that can proceed via 1,2- or 1,4- addition

For butadiene:

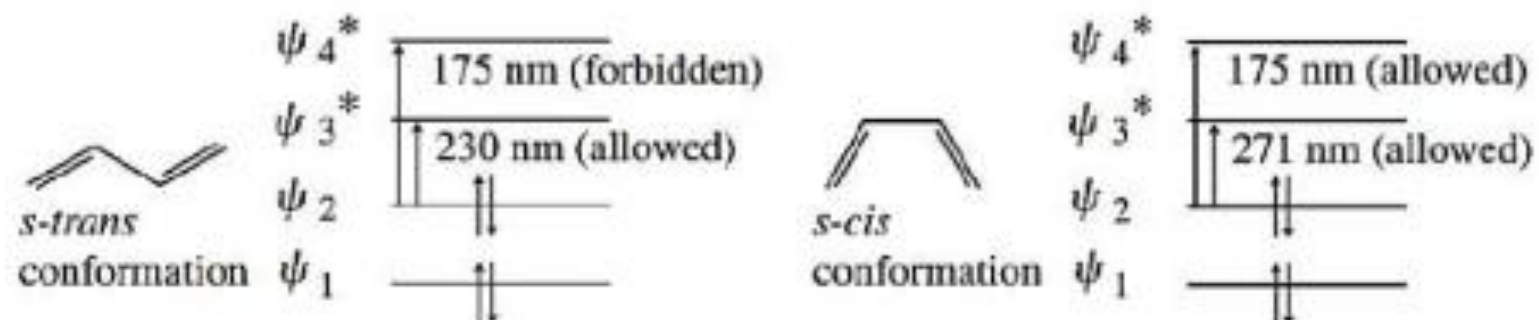
- The 1,2-product dominates at **low** temperature (**kinetic** conditions), whereas
- the 1,4-product dominates at **higher** temperature (**thermodynamic** conditions)

Bromination of butadiene:



Care must be taken, however, to **examine the structure of the diene** in each case.

Kinetic products are **not always 1,2-** and thermodynamic products are **not always 1,4-**



Character table for C_{2h} point group

	E	$C_2(z)$	i	σ_h	linear, rotations	quadratic
A_g	1	1	1	1	R_z	x^2, y^2, z^2, xy
B_g	1	-1	1	-1	R_x, R_y	xz, yz
A_u	1	1	-1	-1	z	
B_u	1	-1	-1	1	x, y	

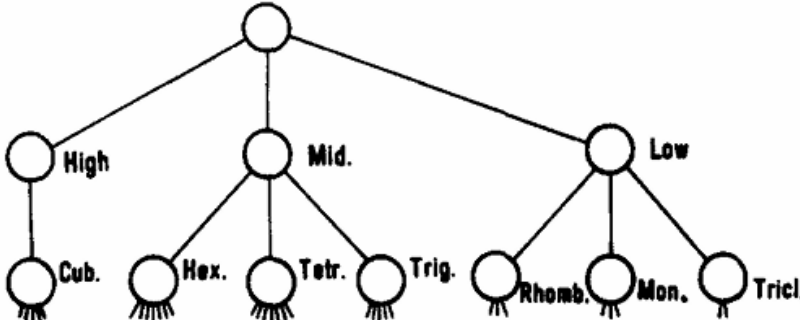
Taxons	Diagram of classification							Fundamental authors	
Crystal kingdom								$\Sigma=$	Rome de L'Isle 1783-1824 Haüy 1784-1820
Categories	High	Mid.				Low	(3)	Bruster 1820	
Systems	Cub.	Hex.	Tetr.	Trig.	Rhomb.	Mon.	Tricl. (7)	Weiss. Moos 1822	
Point-groups of symmetry	5	7	7	5	3	3	2 (32)	Frankenheim 1827 Gessel 1830, Gadolin 1867	
Simple forms	15	8(+5)	9(+2)	8(+6)	4(+3)	1(+2)	2 (47)	Fedorov 1901, Boldirev 1936 Bokiy 1940 (146)	
Bravais-Lattices	3	1	2	1	4	2	1 (14)	Bravais 1850, Fedorov 1885	
Space Groups: symorph hemisymph asymph	s.h.a. 15-17-14 36	s. 37	h. 23	a. 60 120	s. 21	h. 24	a. 29 74 (230)	Zohnke 1879 Fedorov, Schoenflies 1890 Bragg 1913-1920	

Fig. 2. The main studies on crystal symmetry performed in the nineteenth century.

Основные вехи
кристаллографии
(Вокій, 1988)

f.s.	Q	Z	aff.	f.s.	Q	Z	aff.	f.s.	Q	Z	aff.	f.s.	Q	Z	aff.	f.s.	Q	Z	aff.
1,1	2	2	2	1,1,1	2	2	2	1,1,1,1	2	2	2	2-1;1,1	15	113	1670	3;1	16	85	471
1;1	2	4	7	1,1;1	3	6	13	1,1,1;1	3	6	13	2-1;2-1	11	41	302	4-1	37	73	205
2-1	2	2	3	1;1;1	3	13	59	1,1;1,1	2	6	12	2-2',2-2'	2	2	2	4-1'	2	2	3
2-2	4	5	5	2-1;1	7	16	65	1,1;1;1	4	25	207	2-2,2-2	2	5	5	4-2	22	45	53
				2-2;1	12	21	45	1;1;1;1	5	54	1001	2-2;1,1	12	21	49	4-2'	2	2	2
				3	5	15	35	2-1',2-1'	1	1	1	2-2;1;1	22	84	471	4-3	7	16	20
								2-1,2-1	1	3	6	2-2;2-1	22	40	108	4-3'	4	5	5
Σ	10	13	17	Σ	32	73	219	2-1;1,1	7	16	88	2-2;2-2	26	63	87	Σ	227	710	4783

TABLE 1. Families of two-dimensional (left), three-dimensional, and four-dimensional crystallographic groups. In each subtable, the first column gives the family symbols; the others give the number of Q-classes, Z-classes and affine classes.

1. Мюнстер А. Химическая термодинамика. Изд. 2-е, стереотипное. М. : Едиториал УРСС. 2002. 296 с.
2. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. В 4 т. Т. 4. М. : Наука. 1967. 600 с.
3. Baker A. Are There Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena? // Mind. 2005. Vol. 114, No. 454. P. 223–238.
4. Balaguer M. A fictionalist account of the indispensable applications of mathematics // Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition. 1996. Vol. 83, No. 3. P. 291–314.
5. Bersuker I. B. The Jahn-Teller effect. 2006. Cambridge, UK ; New York : Cambridge University Press. 616 p.
6. Bokiĭ G. B. Theory of Crystal Symmetry upon the Derivation of the 230 Space Groups // Computers & Mathematics with Applications. 1988. Vol. 16, No. 5–8. P. 479–485.
7. Colyvan M. The Indispensability of Mathematics. New York : Oxford univ. press. 2001. 192 p.
8. Guth A. H. The inflationary universe: the quest for a new theory of cosmic origins. Random House. 1998. 358 p.
9. Malament D. Review of Science Without Numbers: A Defense of Nominalism. // Journal of Philosophy. 1982. Vol. 79, No. 9. P. 523–524.
10. Ostrogradsky M. Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres. Mem. Acad. St. Petersburg. 1850. Vol. 6, No. 4. P. 385–517.
11. Plesken W., Schulz T. Counting crystallographic groups in low dimensions // Experimental mathematics. 2000. Vol. 9., No. 3. P. 407–411.
12. Várkonyi P. L., Domokos G. Mono-monostatic bodies: the answer to Arnold's question // Math. Intelligencer. 2006. Vol. 28., No. 4. P. 34–38.