

Синтаксическая теорема Гёделя о неполноте и семантические парадоксы

Ершова Полина Александровна

uAnalytiCon Junior

21 апреля 2023 г.

План доклада

- Связь теоремы о неполноте и парадоксов
- Основные понятия
- Теорема о неполноте – это?
- Семантика в теореме о неполноте

Связь теоремы о неполноте и парадоксов

- До сих пор многие парадоксы не имеют решений – основания их появления всё ещё не были обнаружены.
- Основная тенденция в определении оснований парадоксов – отрицательная самореферентность.
- Главный аргумент противников второй тенденции – формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте.

Связь теоремы о неполноте и парадоксов

- Предложение Гёделя: «Это высказывание недоказуемо».
- Парадокс Лжеца: «Это высказывание ложно».

Основные понятия

- Формальная система – конечный (разрешимый) набор аксиом и правил вывода, которые позволяют генерировать новые теоремы.
- Полнота – каждое высказывание на языке этой системы можно доказать или опровергнуть.
- Непротиворечивость – в системе нельзя одновременно и доказать какое-то высказывание, и опровергнуть его.

Теорема о неполноте – это?

- "В любой непротиворечивой формальной системе, в которой возможно интерпретировать аксиомы о натуральных числах, существуют высказывания которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть".
- В доказательстве теоремы две ключевые идеи: Гёделева нумерация и самореферентность.

Теорема о неполноте – это?

=	\emptyset	x	...
1	2	3	...

- $\emptyset = \emptyset \quad \{2, 1, 2\}$
- Г.Н: $2^2 \times 3^1 \times 5^2 = 300$
- $x = x \quad \{3, 1, 3\}$
- Г.Н: $2^3 \times 3^1 \times 5^3 = 3000$
- $x = x; \emptyset = \emptyset$
- Г.Н: $2^{3000} \times 3^{300}$

Теорема о неполноте – это?

- Самореферентная лемма или лемма о диагонализации: $T \vdash D \Leftrightarrow A([D])$. $[D]$ – Гёделев номер D .
- $Proof(x, y)$, или $Proof(x)$.
- Гёделево предложение G : $T \vdash G \Leftrightarrow \neg Proof([G])$.

Семантика в теореме о неполноте

- "В любой непротиворечивой формальной системе, в которой возможно интерпретировать аксиомы о натуральных числах, существуют истинные, но недоказуемые высказывания".
- "Невозможно представить такое понятие доказательства, чтобы все доказуемые высказывания были истинными, а все истинные высказывания – доказуемыми".

Семантика в теореме о неполноте

- Семантическая версия теоремы требует дополнительных "инструментов".
- "Локальная истина" и "метаматематическая доказуемость".
- Истинность – доказуемость и истинность – ложность.

Спасибо за внимание!

