

# Модальная логика с точки зрения Теоретико-Доказательственной семантики\*

Казаков Юрий  
НИУ ВШЭ

ykazakov@hse.ru



## Введение

Теоретико-доказательственная семантика (PTS) по отношению к логическим константам представляет собой класс теорий в логической семантике, утверждающих, что правила натурального вывода (в моём случае – секвенциального) способны фиксировать и передавать значения стандартных логических связок. Для проверки некоторого множества правил (теории доказательств) на предмет возможности определения значения логических констант используется ряд условий (ограничений), которым данные системы должны удовлетворять. В случае с модальной логикой, натуральный вывод не способен предоставить достаточно выразительные конструкции[2], поэтому мной исследуются секвенциальные подходы к такого рода логикам, которые за счёт своей большей выразительности имеют лучший шанс предоставить корректное значение модальных операторов. В работе рассмотрены как классические принципы для определения значения логических констант, выделяемые авторами PTS, так и специфические требования, появляющиеся в контексте модальной логики: семантическая загрязнённость и обобщённость. Делается сравнение существующих секвенциальных формализмов на предмет определения значения модальных операторов.

## Особенности использования секвенций

Секвенциальные структуры могут возникать из разных прагматических соображений. Так, их можно понимать и как строительные леса для аксиоматических исчислений, и как проверку наличия доказательства в исходном синтаксисе, и как проверку выполнимости в модели, относительно которой исчисление полно. Предполагается, что принцип выбора между этими мотивациями не выделяется изначально.

Использование секвенциальных правил вместо натурального вывода предполагает ряд изменений внутри PTS. Так, нормализация естественно заменяется на устранение сечения (в силу почти автоматического получения подформульности, устранение сечения можно считать более информативным аналогом). Формулировку основных определений PTS, например, логического следования можно естественно расширить до более общего класса структур:

Определение 1. Обобщённое отношение логического следования[1].

Пусть  $U$  - любое множество. Обобщённое отношение следования на  $U$  - это  $\vdash \subseteq P(U) \times U$ , удовлетворяющее условиям рефлексивности, монотонности и транзитивности. Тогда любая абстрактная система доказательств должна представлять собой

$$C = \langle U, R \rangle$$

И соответственно значение константы  $c$  в системе  $C$  можно описать следующим соотношением, где  $\vdash_{G(C)}$  - новое обобщённое отношение следования.

$$X \vdash_{G(C)} S \iff X \vdash_C S$$

В данном случае отношение следования проносится через эквивалентные доказательственные системы.

## Критерии определения значения

На основе компаративного исследования (преимущественно [3], [2], [5]) мной были выделены следующие принципы для определения значения в контексте модальных операторов:

- Принцип Дошена: все вариации логик, использующих идентичные логические операторы должны получаться при помощи добавления структурных правил.
- Устранение сечения (или допустимость его и остальных структурных правил для логического варианта теории доказательств).
- Отделимость логических констант. В отличие от классического доказательства подформульности [2], я добавляю в требования для этого свойства принципы, выделенные Х. Вансингом: симметричность, эксплицитность и модулярность. Похоже на принцип композициональности Г. Фреге.
- Обобщённость. Т.е. применимость данных ограничений не только для конкретной модальной логики, но как минимум для всего класса нормальных модальных логик.
- Молекулярность. Отсутствие определяемого оператора в посылках вывода. В противном случае остаётся риск цикличности значения логической связки в том смысле, что она не будет задавать рекурсивное определение значения.

## Семантическая загрязнённость

Критерий семантической загрязнённости существует в двух версиях.

- Сильный принцип А. Аврона: «Систем доказательств должны быть независимы от любой конкретной семантики».
- Слабый принцип Ф. Падджиолеси: «Системы доказательств не должны содержать эксплицитных семантических элементов» [3].

В обоих случаях под семантикой подразумеваются элементы модели. Мне подобная характеристика видится как недостаточно точная. Для формального определения семантической загрязнённости мной введён собственный критерий:

Определение 1 Семантически загрязнённая система. Теория доказательств  $S$  считается загрязнённой, если одно из двух условий выполняется:

- $S$  содержит эксплицитные семантические элементы. Например, для моделей Крипке это элементы из  $\langle W, R, v \rangle$ .
- $S$  имеет перевод с семантический загрязнённой системой доказательств  $S'$ , такой что каждому оператору и мета-языковому обозначению из  $S$  он соотносит элемент из  $S'$ .

Подобный принцип способен дать формальную характеристику аргументу С. Рида против деревьев гиперсеквенций [4] и сочетается с обобщённым отношением логического следования, пронося его через эквивалентные системы. Главный нюанс заключается в том, что наука о доказательствах не обладает знанием о том, как доказывать невозможность такого рода переводов в обобщённом случае, поэтому всегда остаётся риск чрезмерной силы такого рода критерия (например, перевод в аксиоматическое исчисление модальной логики, и как следствие, загрязнённость всех исчислений).

## Результаты

В результате компаративного исследования я пришёл к выводу, что наилучшим вариантом неклассических секвенциальных исчислений является DL Н. Белнапа. Она проходит критерий синтаксической чистоты и является информативной в том смысле, что в отличие от THS, SSC, LSC не построена на включении элементов (или скрытых элементов) семантики Крипке. Идея состоит во введении параллельного классическим формулам генценовских структур, которые связываются между собой отдельным набором операторов и определяются параллельными правилами (например, правила эквивалентности для возможности представления каждой структуры как полноценного антецедента или консеквента). Однако при отказе от синтаксической чистоты, с прагматической точки зрения, лучше подходят маркированные исчисления, за счёт почти автоматического доказательства разрешимости, полноты, св-ва контр-модели и т.д.

| Исчисления            | Seq | DL | THS | LSC | SSC | HS | ND |
|-----------------------|-----|----|-----|-----|-----|----|----|
| 1. Устранение сечения | -   | +  | +   | +   | +   | +  | ?  |
| 2. Чистота            | +   | +  | -   | -   | +   | +  | +  |
| 3. Малекулярность     | -   | +  | +   | +   | +   | +  | -  |
| 4. Св. Дошена         | -   | +  | +   | +   | +   | +  | -  |
| 5. Отделимость        | -   | +  | +   | +   | +   | +  | +  |
| 6. Обобщённость       | -   | +  | +   | +   | +   | +  | -  |

Таблица 1: Соответствие теорий доказательств критериям определения значения

## Заключение

- Использование секвенций кажется весьма убедительным и полезным в случае с модальностями.
- При условии принятия нового критерия синтаксической чистоты наилучшими обобщёнными теориями доказательств являются: DL и HS.
- Если не принимать требование синтаксической чистоты, то маркированные системы (LSC), с прагматической точки зрения, остаётся наиболее полезными и корректными для PTS.
- Для конкретного понимания модальностей в инференциалистском контексте больше всего дают DL, для которых  $\Box$  - это результат актуализации интенциональной структуры.

## Дальнейшие исследования

Мне видится перспективной попыткой исследование PTS для модальной логики без свойства обобщённости, т.е. анализ конкретных теорий доказательств для каждого варианта модальной логики. Подобно тому как мы не исследуем теорию импликаций вообще, возможно, есть смысл не рассматривать вместе с  $\Box$  все его комбинаторные варианты. И некоторые точечные исчисления могут оказаться более подходящими, чем представленные здесь. Также я считаю важным пойти дальше алетических модальностей и рассмотреть, например, эпистемические логики, в которых инференциалистское определение значения кажется весьма естественным. Очень важным шагом я считаю исследование переводов между теориями доказательств в контексте синтаксической чистоты. Представление более точного определения переводов между такими теориями, которое позволяло бы промышленно доказывать не только наличие, но и отсутствие таких трансляций.

## Список литературы

- [1] B. Dicher and F. Paoli. The original sin of proof-theoretic semantics. *Synthese*, 198:615–640, 1 2021.
- [2] N. Francez. Proof-theoretic Semantics, volume 57. College Publications, studies in logic edition, 2015.
- [3] F. Poggiolesi. Gentzen Calculi for Modal Propositional Logic. Springer Netherlands, 2011.
- [4] S. Read. Semantic pollution and syntactic purity. *The Review of Symbolic Logic*, 8:649–661, 12 2015.
- [5] H. Wansing. Displaying Modal Logic. Springer Dordrecht, 1998.

\*Постер подготовлен в результате проведения исследования в рамках проекта «Международное академическое сотрудничество» НИУ ВШЭ.